8/1/2019

Γραμμικά συστήματα

$Ax = b$ $\quad$ $A_{m\times n}$ πίνακας

$X_{n\times 1}$ άγνωστοι

$b_{m\times 1}$ σταθ. όροι.

$Ax=b$ συμβιβαστό $\Leftrightarrow$ έχει λύση $\exists (c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n$ ώστε:

$$A\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

Αν έχει λύση, μας ενδιαφέρει από τι εξαρτάται το σύνολο των λύσεων.

Ομογενές σύστημα: $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

Ένα ομογενές σύστημα έχει πάντα τη μηδενική λύση.

$A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ γραμμική απεικόνιση

$x\to Ax$

Βρες όλα τα διανύσματα $x\in\mathbb{R}^n$ ώστε $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$

Βρες τον πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης $\Leftrightarrow$ KerA

Λύσεις ομογενούς $\Leftrightarrow$ KerA!

Αν η διάσταση του πυρήνα 0 τότε έχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα.

Γνωρίζουμε ότι $\dim \ker A = n - \operatorname{rank} A$
Η διάσταση του χώρου των λύσεων στο ομογενές καθορίζεται από το $n - \operatorname{rank} A$

$\operatorname{rank} A \leq \min(n,m)$

Αν $n > m \Rightarrow n - \operatorname{rank} A \geq 1$ οπότε άπειρες λύσεις

$n = m \not\Rightarrow n - n$ δε γίνεται
$n < m \not\Rightarrow n - \operatorname{rank} A \leq 1 \rightarrow$ ούτε αυτό γίνεται

Αν $n = m$ και A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n \Leftrightarrow \dim \ker A = 0$
$\Leftrightarrow$ μοναδική λύση.

Λύσεις για το γενικό σύστημα $Ax = b \rightarrow$ Επαυξημένος.
Έχει λύσεις αν-ν $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A, b)$
δηλαδή το b είναι γρ. συνδ. του A, άρα το b είναι άχρηστος.
Πόσες λύσεις έχει;

Αν $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ είναι λύση του ομογενούς $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ και
$\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ είναι λύση του κανονικού $Ax = b$, τότε και το $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} +$
$+ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ είναι επίσης λύση του κανονικού.

Ο χώρος των λύσεων του κανονικού δίνεται από το σύμπλοκο $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} + \ker A$.

"Το σύνολο λύσεων του κανονικού έχει διάσταση" $\dim \ker A$. Αν $\ker A = 0 \Leftrightarrow$ Μοναδική λύση το κανονικό, αν έχει λύση.

Να βρεθεί το $t \in \mathbb{R}$ ώστε το ομογενές σύστημα να έχει α) μοναδική λύση β) λύσεις διάστασης 1 γ) λύσεις διάστασης 2.

$$\begin{aligned} tx+3y-2&=0\\ 3x+6y-2z&=0\\ -x-3y+tz&=0 \end{aligned}$$

$$A=\begin{pmatrix} t & 3 & -1\\ 3 & 6 & -2\\ -1 & -3 & t \end{pmatrix}$$

Μοναδική $\Leftrightarrow \dim \ker A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 3 \Leftrightarrow A$ αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\begin{pmatrix} t & 3 & -1\\ 3 & 6 & -2\\ -1 & -3 & t \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3\det\begin{pmatrix} t & 1 & 1\\ 3 & 2 & -2\\ -1 & -1 & t \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} t & 1 & -1\\ 3-2t & 0 & 0\\ -1 & 1 & t \end{pmatrix} =$$

$$= -3(3-2t)\det\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & t \end{pmatrix} = -3(t-1)(3-2t).$$

Μοναδική λύση αν-ν $t-1 \neq 0$ και $3-2t \neq 0 \Rightarrow t \neq 1$ και $t \neq \frac{3}{2}$

για $t=1$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rank}A = 2 \Leftrightarrow \dim \ker A = 3-2 = 1$

$t=\frac{3}{2}$ $A=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

άρα και πάλι $\operatorname{rank}A = 2 \Rightarrow \dim \ker A = 1$

Να διερευνηθεί και λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}$$

για $\lambda = 1 \to x+y+z=1 \Rightarrow x = 1-y-z$

Λύσεις θα είναι $(x,y,z) = (1-y-z, y, z) = (1,0,0) + (-y, y, 0) + (-z, 0, z) = (1,0,0) + y(-1,1,0) + z(-1,0,1)$ και $y, z \in \mathbb{R}$

μια λύση $x+y+z=1$

Και $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$ είναι λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς.

$\lambda \neq 1$ $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda \neq 0$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda(1-\lambda)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1+\lambda & 1+\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$

για $\lambda \neq -2$ έχουμε $\text{rank}A = 3$
Άρα έχουμε μοναδική λύση για $\lambda \neq -2$ και $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 0$

για $\lambda = 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ Μοναδική λύση για $\lambda \neq -2$ και $\lambda \neq 1$

για $\lambda = -2$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\lambda = -2$ δεν έχουμε λύση.

για $\lambda \neq -2$ και $\lambda \neq 1$ είναι σύστημα Cramer.

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}} \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}}$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}}$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} = +(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+2) = (\lambda-1)^2(\lambda+2) =$$
$$= (\lambda-1)(\lambda+2)$$

π.χ. Να βρεθούν τα λ και μ ώστε το σύστημα να έχει μοναδική, περισσότερες από μία, καμία λύση

$$\begin{pmatrix} x+y+z=1 \\ x+\lambda y+\mu z=2 \\ x+\lambda^2 y+\mu^2 z=4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \mu & 2 \\ 1 & \lambda^2 & \mu^2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \mu-1 & 1 \\ 0 & \lambda^2-1 & \mu^2-1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Πότε θα έχουμε άπειρες λύσεις: Αν $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε $\kappa(0, \lambda-1, \mu-1, 1) = (0, \lambda^2-1, \mu^2-1, 3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \kappa(\lambda-1) = \lambda^2-1 \\ \kappa(\mu-1) = \mu^2-1 \\ \kappa=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\lambda-3 = \lambda^2-1 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \\ \mu^2-3\mu+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \lambda_1 = 2, & \lambda_2 = 1 \\ \mu_1 = 2, & \mu_2 = 1 \end{array}$$

• $\lambda_2=1, \mu_2=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

• $\lambda_1=1, \mu_1=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις διάστασης 1.

Διότι $\operatorname{rank} A = 2 \Rightarrow \ker A = 3-2 = 1$

Για $\lambda_1=2$ και $\mu_2=1$ έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα λόγω συμμετρίας.

$\boxed{\lambda+1\neq 0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \mu-1 & 1 \\ 0 & \lambda^2-1 & \mu^2-1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \mu-1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu^2-1-(\lambda+1)(\mu-1) & 3-(\lambda+1) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \mu-1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu(\mu-\lambda)-(\mu-\lambda) & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \mu-1 & 1 \\ 0 & 0 & (\mu-\lambda)(\mu-1) & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Μοναδική λύση $\lambda\neq 1$, $\lambda\neq\mu$, $\mu\neq 1$ για $\lambda=1$, $\mu=1$ το έχουμε βρεί.

- για $\lambda=\mu$ και $\lambda=2$ έχουμε άπειρες λύσεις διάστασης 1.
- για $\lambda=\mu$ και $\lambda\neq 2$ δεν έχουμε λύσεις
- για $\lambda\neq\mu$ $\not\Rightarrow$ $\lambda=1=\mu$ απορρίπτεται

Για $\lambda=-1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \mu & 2 \\ 1 & 1 & \mu^2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & \mu-1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu^2-1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda=-1$ και $\mu\neq -1$

$\lambda=-1$ και $\mu=1$ δεν έχει λύσεις.